МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
КОМИСИЯ ПО ПРОВЕЖДАНЕТО НА IX НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

IV КРЪГ
15 юли 2006 г., гр. Стара Загора

Ученици старша възраст - решения

1 задача. През лятото на 2026 г. астрономът Александър Куртенков извършва наблюдения от борда на геостационарна космическа станция. В свободното си време той дава консултации по GSM на участниците в астрономическия лагер “The Dishes” в източната част на Африка с координати φ = 0°, λ = 45°. В помощ на обучението, Александър решава да изпрати контейнер с научна информация и част от своите хранителни запаси до лагера.

С каква скорост и в каква посока трябва да се изхвърли контейнерът от станцията, така че да пада вертикално към Земята?

Какви са приблизително координатите на астрономическата обсерватория, над която се намира станцията? Приблизително в коя част на света е тя?

С каква минимална скорост на изхвърляне от станцията контейнерът може изобщо да достигне земната повърхност? Пресметнете големината на скоростта, с която контейнерът ще се удари в земната повърхност в този случай.

Влиянието на атмосферата да не се отчита.

Справочни данни:
Радиус на Земята – 6378 км
Маса на Земята – 6 x 10^{24} кг
Гравитационна константа – $\gamma = 6.67\times10^{-11}$ м^3/кг.с^2

Решение: Геостационарният спътник се движи в екваториалната равнина на Земята по посока на нейното околоосно въртене с период T, равен на едно звездно денонощие, или 23^h56^m . Радиуса на орбитата му r намираме от III закон на Кеплер:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2}$$

където M е масата на Земята, а γ е гравитационната константа.

$$r = \sqrt[3]{\frac{\gamma M T^2}{4\pi^2}} \approx 43400 \text{ км}$$

За да пада контейнерът вертикално към Земята, той трябва да се изхвърли от спътника в посока, обратна на неговото движение, със скорост, равна по големина на скоростта на спътника. Тази скорост е:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \sqrt[3]{\frac{2\pi\gamma M}{T}} \approx 3.08 \text{ км/с}$$

За да оценим времето за падането на контейнера на Земята, предполагаме, че той се движи по много силно сплесната елиптична орбита около центъра на нашата планета с голяма полуос, равна на половината от радиуса на геостационарната орбита. Периодът на движение на контейнера по такава орбита T_1 можем да намерим отново с помощта на III закон на Кеплер:

$$\frac{(r/2)^3}{T_1^2} = \frac{r^3}{T^2}$$

$$T_1 = \frac{T}{2\sqrt{2}}$$

Времето за падането на контейнера ще бъде половината от този период, или:

$$t = \frac{T_1}{2} = \frac{T}{4\sqrt{2}} \approx 4^{h}14^{m}$$

Но това е времето, за което контейнерът би паднал не до земната повърхност, а до центъра на Земята. Радиусът на Земята обаче, е само около 1/7 от радиуса на орбитата на спътника. Освен това за изминаването на тази последна 1/7 от пътя си до центъра на Земята, в случай, че цялата й маса беше съсредоточена в една точка там, контейнерът би изразходвал много малко време в сравнение с останалата част от пътуването си, защото би се движил с много голяма скорост. Ето защо можем да пренебрегнем това и да считаме, че времето за падане на контейнера на земната повърхност е приблизително 4 часа. За тези 4 часа Земята ще се завърти на около $4\times15° = 60°$ на изток. Следователно точката на падането на контейнера ще бъде на 60° западно от обсерваторията, над която „виси" геостационарният спътник. Географските координати на обсерваторията ще бъдат $\varphi = 0°$, $\lambda = 105°$. Това е някъде в Индонезия.

Минималната скорост на изхвърляне от контейнера v_2 , при която той въобще ще достигне до земната повърхност, е скоростта, при която контейнерът би тръгнал да се движи по елипса с апогей върху геостационарната орбита и перигей върху земната повърхност. Голямата полуос на такава елипса би била:

$$a = \frac{r+R}{2}$$

където R е радиусът на Земята. Скоростта на контейнера относно Земяата в апогей, т.е. в момента на изхвърлянето от спътника, ще бъде $v_a = v - v_2$. Означаваме скоростта на контейнера в перигей с v_p . Съгласно II закон на Кеплер:

$$v_p R = v_a r$$

Приравняваме пълната механична енергия на контейнера в момента на хвърлянето му от спътника и в момента на достигането му до Земята:

$$\frac{v_a^2}{2} - \frac{\gamma M}{r} = \frac{v_p^2}{2} - \frac{\gamma M}{R}$$

Масата на контейнера сме съкратили като множител във всеки от членовете на уравнението. От последните две уравнения получаваме:

$$v_a = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r+R}\cdot\frac{R}{r}}$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r+R}\cdot\frac{r}{R}}$$

Скоростта, с която трябва да се изхвърли контейнерът от спътника, ще бъде:

$$v_2 = v - v_a \approx 1.54 \text{ км/с}$$

А скоростта, с която ще се удари в земната повърхност, ще бъде:

$$v_3 = v_p - v_0$$

Където $v_0 = 2\pi T/R$ е линейната скорост на точка от екватора при околоосното въртене на Земята.

$$v_3 \approx 10.0 \text{ км/с}$$

2 задача. Вие сте светлозелени жители на Алфа, живеещи в съдружие с вашите виолетови съседи от Бета под лъчите на светилото Гама. Можете да виждате Бета само от едната страна на Алфа. Вашето алфа-денонощие съдържа 16 бета-цикъла. Всеки от тях е равен на времето между две преминавания на Блестящия бета-остров през централния меридиан на видимия диск на Бета. А времето между две обръщания на северната полярна бета-шапка към вас е равно на 15 бета-цикъла.

От гледна точка на жителите на Бета, колко бета-денонощия съдържа една година (една обиколка около Гама)?

Решение: Виж решението на 2 задача за младша възраст.

3 задача. С методите на звездната интерферометрия е измерен ъгловият диаметър на звезда с блясък $4^m.7$. Големината на диаметъра е 0.004'' (дъгови секунди). Спектроскопичните наблюдения на звездата показват, че жълтата линия на натрия (5890 ангстрьома) има две компоненти – ярка и слаба. Дължината на вълната на слабата компонента се променя синусоидално с амплитуда ±0.6 ангстрьома и период 30 години, а веднъж в рамките на този период слабата линия изчезва за интервал от 230 дни. Оценете разстоянието до звездата, нейната маса и температура на повърхността. Какъв тип звезда е това?

Решение: Слабата компонента на натриевата линия в спектъра на звездата се създава от звезда-спътник, която е значително по-малка от главната звезда. Орбиталният период на спътника около главната звезда е T = 30 години. От амплитудата $\Delta\lambda$ = ±0.6 Å на изменение на дължината на вълната на натриевата линия с λ = 5890 Å можем да намерим линейната скорост на движение на спътника:

$$v = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} c \approx 30 \text{ км/с}$$

където c е скоростта на светлината. Изчезването на слабата компонента на натриевата линия се дължи на затъмнение на спътника от главната звезда. Ако приемем, че затъмнението е централно, то от продължителността му t = 230 дни можем да пресметнем диаметъра на главната звезда:

$$D = vt \approx 600 \times 10^6 \text{ км}$$

Като имаме предвид ъгловия размер на звездата $\delta = 0.004''$, изчисляваме разстоянието до нея:

$$r = \frac{D}{\delta}$$

За да го получим направо в парсеци, превръщаме D в астрономически единици:

$$r = \frac{D/150\times10^6 km}{0.004''} = 1000 \text{ pc}$$

Като знаем орбиталния период на спътника и неговата скорост, можем да намерим радиуса на неговата орбита около главната звезда:

$$a = \frac{vT}{2\pi} \approx 4.5\times10^9 \text{ км} = 30 \text{ AU}$$

Предполагаме, че масата на спътника е много по-малка от масата на главната звезда. От III закон на Кеплер за масата на главната звезда M в слънчеви маси намираме:

$$M = \frac{a^3}{T^2}$$

Тук a е в астрономически единици, а T в години.

M = 30 слънчеви маси

Забелязваме, че видимата звездна величина на звездата е приблизително равна на абсолютната звесдна величина на Слънцето. Разстоянието до звездата обаче е 1000 парсека, или 100 пъти по-голямо от стандартното разстояние от 10 pc, спрямо което се дефинира абсолютната звездна величина. Следователно светимостта L на звездата е 100^2 = 10000 пъти по-висока от светимостта на Слънцето L_S. Ако означим с $R = D/2$ и R_S = 700 000 км радиусите на звездата и на Слънцето, а с T и T_S – техните температури, то можем да напишем:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

$$L_S = 4\pi R_S{}^2 \sigma T_S{}^4$$

Където σ е константата на Стефан-Болцман. Разделяме почленно двете равенства:

$$\frac{L}{L_S} = \left(\frac{R}{R_S}\right)^2 \left(\frac{T}{T_S}\right)^4$$

Като знаем, че температурата на Слънцето е 6000 K, за температурата на звездата получаваме:

$$T = T_S \sqrt[4]{\frac{L}{L_S}\left(\frac{R_S}{R}\right)^2}$$

$$T \approx 2900 \text{ K}$$

Звездата е много по-масивна от Слънцето и е в края на своята еволюция – превърнала се е в червен свръхгигант.